Guardonats en la convocatòria de 2014

• El premi Matemàtiques i Societat ha estat atorgat a l'Associació per Promoure i Crear el Museu de Matemàtiques a Catalunya, per la creació de l'espai expositiu permanent «Experiències matemàtiques» al Palau Mercader de Cornellà, i per les altres activitats de divulgació de les matemàtiques realitzades el darrer any.
• Les borses Ferran Sunyer i Balaguer han estat atorgades a Francesc Font Martínez (UPC) per fer una estada de tres mesos a l'Institut de Tecnologia de Nova Jersey (EUA), a Elisa Lorenzo García (UPC) per fer una estada de tres mesos a Microsoft Research (EUA), a Marina Murillo Arcila (UPV) per fer una estada de dos mesos a la Universitat de Salento (Itàlia) i a Carlos de Vera Piquero (UPC) per fer una estada de dos mesos a la Universitat de Pàdua (Itàlia).

Els premis i borses de la Fundació foren lliurats el passat 22 d'abril de 2014 en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudis de l'IEC.

Racó biogràfic

Ernest Corominas

Barcelona 1913 – Lió 1992

Nota biogràfica

Ernest Corominas i Vigneaux va néixer a Barcelona l'any 1913. Era fill del polític i assagista Pere Corominas i Montanya i germà del filòleg Joan Corominas. La seva mare, Celestina Vigneaux, era una pedagoga que va motivar l'interès per la ciència en l'ambient familiar. Ernest Corominas va estudiar matemàtiques i arquitectura a la Universitat de Barcelona fins que, amb l'inici de la Guerra Civil, s'incorporà a l'exèrcit republicà com a oficial de sapadors. En acabar la guerra s'exilià primer a França i després a l'Amèrica del Sud. S'establí a Santiago de Xile, on va començar a treballar com a arquitecte, però ben aviat i mercès a l'ajuda de Julio Rey Pastor s'incorporà a la Universitat de Buenos Aires per un període d'un any i després va passar a ocupar una plaça de professor titular a la seu de Mendoza de la Universitat Nacional de Cuyo. Estava vinculat a l'Institut d'Economia de la Universitat i ensenyava matemàtica financera. Hi va estar fins l'any 1946, quan ell i molts col·legues van perdre el lloc de treball per la repressió universitària que va dur a terme el règim peronista. En aquest període va conèixer i es va casar amb Maria Edith Guevara, cosina de qui més tard seria el famós Che Guevara.

Des del punt de vista matemàtic, en aquesta època de Mendoza, a més de millorar la seva formació, va publicar dos articles en els quals refinava els mètodes que A. Denjoy havia fet servir per estudiar les derivades de Peano. Probablement coneixedor d'aquest treball, el mateix Denjoy li va oferir una posició al Centre Nacional de la Recerca Científica (CNRS), a París, al qual es va incorporar l'any 1947.

En el període que va estar al CNRS, Corominas va treballar sota la direcció de Denjoy. Es va trobar en un ambient científic molt ric on hi havia matemàtics com P. Malliavin, J. P. Kahane o G. Choquet. Va defensar la seva tesi estructurada en dues parts: la primera, en la qual desenvolupava un càlcul diferencial a partir de la teoria de Peano i la segona, sobre àlgebra asimptòtica. En aquella època a París hi havia també altres estudiants de Denjoy com D. Kurepa, R. de Possel o R. Fraïssé que treballaven en lògica matemàtica i teoria de conjunts ordenats i potser per aquest fet no és del tot sorprenent que més endavant Corominas es dediqués als conjunts ordenats.

Un cop acabada la tesi doctoral a París, l'any 1952, Corominas va voler tornar a Barcelona amb la finalitat d'establir-s'hi personal-

ment i matemàticament i crear, si fos possible, una escola en els temes en els quals volia treballar. Però l'ambient que va trobar a la Universitat de Barcelona no li va ser gens favorable. Durant el període que va romandre a Barcelona l'única assignació econòmica fixa que tenia li venia d'una plaça d'investigador especial del Consell Superior d'Investigacions Científiques, que havia obtingut gràcies al suport encara de J. Rey Pastor, i s'havia de mantenir amb altres feines com ara fer classes de matemàtiques en un centre privat d'ensenyament secundari. No només no va trobar cap suport entre els professors de Barcelona, tret d'alguna honrosa excepció, sinó que li van posar dificultats perquè pogués ocupar alguna plaça que havia de sortir a concurs.

La seva estada a Barcelona, amb tot i aquestes dificultats, s'allargà fins l'any 1960, i s'hi poden destacar tanmateix dos fets positius: un va ser la visita a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton que va fer al llarg de l'any 1955, on es va trobar per segona vegada en un ambient matemàtic de primer nivell i que ell va aprofitar per aprofundir en els problemes sobre conjunts ordenats que volia considerar.

El segon element rellevant per a Corominas en aquest període fou la consolidació de la seva relació de treball i d'amistat amb Ferran Sunyer i Balaguer, a qui havia conegut l'any 1949. Corominas i Sunyer van publicar un treball conjunt el qual ha esdevingut, tant per a l'un com per a l'altre, el resultat més conegut de la seva producció matemàtica: és el que fa referència a la caracterització dels polinomis entre les funcions indefinidament derivables. La relació entre Corominas i Sunyer fou molt estreta mentre Corominas visqué a Barcelona i, a partir de l'any 1960, la correspondència entre ells dos no s'aturà fins a la mort de Sunyer, l'any 1967.

Tot i així, Corominas va tenir alguna oportunitat d'incorporar-se a la universitat espanyola, però fora de Catalunya, que va desestimar, i l'any 1960 emigrà cap a Veneçuela, on va ser professor a la Universitat Central, amb seu a Caracas. Allà va aconseguir una posició econòmica més folgada però es va trobar aïllat científicament. Es va dedicar ja plenament als conjunts ordenats però en un departament de matemàtiques que s'anava desfent ràpidament. Això, a més de raons personals, el feren decidir a tornar a prop de Catalunya, projecte que es va concretar l'any 1964.

Gràcies, en part, al suport de Ferran Sunyer, que tenia bona relació amb diversos matemàtics francesos, Corominas va obtenir una posició de professor associat a la universitat Claude-Bernard de Lió i el 1973 passà a professor titular de la mateixa universitat, on s'hi va jubilar el 1982, passant a professor emèrit. Corominas morí a Lió el 1992.

El període francès fou l'etapa més llarga que Corominas passà en una mateixa universitat i també el període en què va tenir més estabilitat acadèmica i millors condicions de treball. Aquesta situació favorable queda reflectida en la feina que va poder desenvolupar: dins del camp de l'àlgebra ordinal va proposar una aproximació teòrica als conjunts ordenats a través de la idea de «bon quasi-ordre»; va formar un grup de deixebles, alguns dels quals van ser molt productius en els temes en què els va iniciar Corominas i, finalment, va consolidar el seu grup de recerca creant un laboratori d'àlgebra ordinal a la mateixa universitat de Lió. Aquest corrent d'àlgebra ordinal va jugar un paper molt important en el desenvolupament de la matemàtica discreta a Lió, en relació amb la informàtica.

Més informació sobre la biografia d'Ernest Corominas es pot trobar a l'obra d'Antoni Malet, *Ferran Sunyer i Balaguer*, Societat Catalana de Matemàtiques, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Institut d'Estudis Catalans, 1995.

L'obra matemàtica

A l'hora de descriure i valorar l'obra matemàtica d'Ernest Corominas s'ha de tenir en

compte la vida itinerant que va dur a terme i les circumstàncies i l'ambient matemàtic en què es va trobar en cada una de les etapes de la seva vida.

En general la seva producció matemàtica és irregular i reflecteix la provisionalitat i la inestabilitat que el van acompanyar durant molts anys. Tot i així, almenys en dos períodes de la seva vida, a París primer i a Lió després, va exercir de professor i d'investigador en dues universitats que li van proporcionar un entorn acollidor i amb un bon nivell científic.

Precisament és en aquests dos períodes en els quals es concentra la seva obra publicada. Primer al CNRS, on elabora la tesi doctoral amb el professor Denjoy, etapa que dóna lloc a un article llarg en el Butlletí de la Societat Matemàtica de França i, més tard, a dues publicacions sobre àlgebra asimptòtica, que és un tema que havia tractat també en la tesi. Un cop a Lió, amb una posició estable, i ja posat de ple en la recerca en àlgebra ordinal, publica unes quantes notes al *Comptes Rendus de l'Académie des Science de París* (algunes en col·laboració) i un article més llarg sobre el millor quasi-ordre de Nash-Williams.

En el període entre 1952 i 1964, Corominas no troba la tranquil·litat o les condicions adequades per poder concentrar-se amb èxit en la recerca matemàtica. Durant els vuit anys que va estar a Barcelona, set si descomptem la visita a Princeton, no només no va aconseguir fer-se un lloc a la universitat sinó que va passar moltes dificultats econòmiques. A Caracas les dificultats venien més aviat de l'ambient social enrarit, de la preocupació per l'educació dels fills i de la falta de col·legues amb qui poder discutir, sobretot els dos últims anys. Tampoc hi va trobar la possibilitat de tenir cap estudiant. Al final de la seva etapa veneçolana, Corominas recordava que portava catorze anys d'aïllament matemàtic, dels quals els de Barcelona li havien deixat una frustració infinita.

En qualsevol cas cal situar en aquests anys d'inestabilitat la relació amb Ferran Sunyer. Només van publicar un treball conjunt (un anunci al *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* i la demostració del resultat a la *Revista Matemática Hispano-Americana*) sobre la caracterització dels polinomis com aquelles funcions indefinidament derivables a la recta que en cada punt tenen alguna derivada que s'hi anul·la. Aquesta caracterització, coneguda com a teorema de Corominas-Sunyer ha esdevingut força citada gràcies, en part, al fet que R. P. Boas la va utilitzar com a fil conductor del seu llibre *A primer of real functions*.

Corominas, com a matemàtic, no es pot adscriure d'una manera clara a cap escola de l'època en què va desenvolupar la seva activitat. Com a mestre seu hauríem de considerar Denjoy, però la temàtica que interessa Corominas des que va deixar París no correspon a l'escola francesa de teoria de funcions de variable real o de variable complexa. Tot i així l'etapa francesa va ser un període decisiu en la personalitat matemàtica de Corominas i cal remarcar la influència que pogueren tenir sobre el seu interès per als conjunts ordenats els estudiants de Denjoy que van coincidir amb ell al CNRS. De fet, el mateix Denjoy va publicar en aquesta època alguna nota sobre nombres ordinals.

Fa la impressió que la força que empeny Corominas cap a les matemàtiques no li ve tant d'un aprenentatge ordenat o de la influència d'altres matemàtics, sinó més aviat d'un impuls natural que el porta a la creació abstracta. Ell mateix reconeix en la seva correspondència amb Sunyer que tots dos tenen en comú «el ser autodidactes i el neguit intern per fer de les matemàtiques una aventura creadora, la formació sense escola i predisposició en la sang» (cf. A. Malet *Ferran Sunyer i Balaguer*).

En els períodes de tranquil·litat i concentració en la recerca, Corominas desplega una gran dedicació i tensió, convençut que els resultats no vénen d'un cop de geni sinó més aviat de la passió, la voluntat i la dedicació. Corominas es proposa objectius difícils que tenen a veure més amb la fonamentació de les matemàtiques i de les diverses teories que no pas amb la solució d'un problema ja plantejat. Així els dos temes principals en què fou productiu són la fonamentació del càlcul diferencial, d'una banda, on aprofundeix en les derivades d'ordre superior introduïdes per Peano, i d'altra banda la teoria dels nombres ordinals, a la qual hi arriba a partir de l'obra de Tarski.

Al llarg de la seva carrera Corominas va exercir la docència en diverses facultats; era un professor dedicat a l'ensenyament i als seus alumnes. S'esforçava per transmetre les matemàtiques d'una manera entenedora i alhora

viva i els seus alumnes en tenen un record afectuós. Tenir estudiants postgraduats i formar escola va ser per a ell una preocupació constant i només ho va poder aconseguir en l'etapa de professor a la Universitat de Lió. Quan hi va arribar, l'any 1964, ja feia temps que tractava problemes de conjunts ordenats i va introduir aquesta temàtica en els seus cursos per a graduats sota el nom d'àlgebra ordinal. Va dirigir les tesis de tercer cicle de R. Bonnet, M. Pouzet, M. Djalali i R. Assous i les tesis d'estat dels dos primers. Tots dos van anar publicant regularment sobre conjunts ordenats, de vegades en col·laboració amb el mateix Corominas, i tots ells participaren en seminaris i congressos d'abast internacional. La feina que va fer a Lió ha tingut, doncs, una continuació de molt bon nivell a través dels seus deixebles. L'any 1982, amb motiu de la seva jubilació, els seus alumnes van organitzar un congrés internacional sobre els conjunts ordenats i les seves aplicacions al qual la revista *Discrete Mathematics* hi va dedicar un número especial.

Llista de treballs publicats

1. «Propiedades diferenciales de las funciones continuas que carecen de puntos angulosos», *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 6 (1945), 41–62.

2. «Sobre derivadas generalizadas de Peano», *Revista Unión Mat. Argentina*, 12 (1946), 88–93.

3. «Dérivation de Riemann-Schwarz», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 224 (1947), 176–177.

4. «Sur un théorème de M. Denjoy», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 226 (1948), 1159–1161.

5. «Contribution à la théorie de la dérivation d'ordre supérieur», *Bull. Soc. Math. France*, 81 (1953), 177–222.

6. En col·laboració amb Ferran Sunyer, «Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynome», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 238 (1954), 558–559.

7. En col·laboració amb Ferran Sunyer, «Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio», *Revista Mat. Hisp.-Amer. (4)*, 14 (1954), 26–43.

8. «Algèbre asymptotique», *Rev. Acad. Ci. Madrid*, 54 (1960), 453–487.

9. «Algèbre asymptotique. II», *Rev. Acad. Ci. Madrid*, 55 (1961), 295–364.

10. «Sur une application de l'algèbre ordinale a la théorie des groupes abéliens de torsion», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272 (1971), A1357–A1359.

11. «Application de l'algèbre ordinale aux groupes abéliens de torsion», *Comptes-Rendus des Journées d'Algèbre Pure et Appliquée*, Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpeller (1971), 144–148.

12. En col·laboració amb R. Bonnet i M. Pouzet, «Simplification pour la multiplication ordinale», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276 (1973), A221–A224.

13. En col·laboració amb R. Bonnet i M. Pouzet, «Simplification pour la multiplication ordinale», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276 (1973), A339–A342.

14. «On better quasi-ordering countable trees: Special volume on ordered sets and their applications» (L'Arbresle, 1982), *Discrete Math.*, 53 (1985), 35–53.

15. «Sur les ensembles ordonnés projectifs et la propriété du point fixe», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311 (1990), n. 4, 199–204.

Comentaris sobre els treballs publicats

Els articles publicats per Ernest Corominas es poden agrupar en dos blocs. El primer bloc correspon als treballs inicials, la tesi doctoral i els resultats de la seva col·laboració amb Ferran Sunyer; en el segon grup hi ha les publicacions sobre conjunts ordenats en diversos temes d'àlgebra ordinal. Farem els comentaris en dues seccions separades.

Secció 1: Treballs inicials, tesi doctoral, col·laboració amb Ferran Sunyer

La tesi d'Ernest Corominas, presentada a París l'any 1952 sota la direcció d'Arnaud Denjoy, té dues parts diferenciades. La primera [5] tracta de propietats de les derivades d'ordre superior d'una funció en el sentit de Peano i és, d'alguna manera, la continuació dels treballs previs [1],

[2], [3] i [4]. En la segona part de la tesi, [8] i [9] estudia les propietats asimptòtiques dels polinomis de grau acotat. D'altra banda, [6] i [7] contenen els resultats de la col·laboració de Corominas amb Ferran Sunyer, el més destacable dels quals és la caracterització dels polinomis com les funcions indefinidament derivables que tenen alguna derivada nul·la a cada punt de la recta.

En els primers treballs i en la primera part de la tesi, Corominas considera l'extensió de les propietats clàssiques de les funcions derivables com ara el teorema de Rolle, el teorema del valor mitjà o el teorema de Cauchy al cas que es consideri la noció de derivada en el sentit de Dini o de Peano. Recordem les definicions introduïdes per aquests autors.

Dini associa a cada funció definida al voltant d'un punt $x_0 \in \mathbb{R}$, quatre *nombres derivats* posant

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}\,;$$

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}$$

per als nombres derivats superior i inferior per la dreta. De manera anàloga es defineixen els nombres derivats per l'esquerra $D^- f(x_0)$ i $D_- f(x_0)$. S'anomenen nombres derivats *associats* els que corresponen a un mateix costat de x_0 i nombres *oposats* els que són de costats contraris i límits contraris. És clar que una funció és derivable en el punt x_0 si els quatre nombres derivats en x_0 coincideixen.

L'any 1935, Denjoy va introduir els nombres derivats d'ordre superior de manera inductiva. Suposant que en el punt $x_0 \in \mathbb{R}$ els coeficients diferencials $f_k(x_0)$, $k = 1, \ldots, n-1$ existeixen (és a dir, els quatre nombres derivats coincideixen), llavors posa

$$D_n^+ f(x_0) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{n!}{h^n} \left[f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k(x_0)}{k!} h^k \right],$$

i definicions anàlogues per a $D_n^- f(x_0)$, $D_{n,+} f(x_0)$ i $D_{n,-} f(x_0)$. Si aquests quatre nombres coincideixen, defineixen $f_n(x_0)$.

Corominas observa que moltes de les propietats de les derivades ordinàries són certes per a les derivades de Dini sempre que la funció no tingui punts angulosos, entenent per punt angulós un punt en el qual la derivada superior per un costat és més petita que la derivada inferior per l'altre costat. Així doncs suposa que

$$D^+ f(x_0) \geq D_- f(x_0) \quad \text{i} \quad D^- f(x_0) \geq D_+ f(x_0)$$

a tot punt.

Amb aquesta hipòtesi resulta, per exemple, que el teorema del valor mitjà val per a almenys una de les derivades per cada costat. Més precisament:

- Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és contínua (i no té punts angulosos), llavors existeix un punt $x_0 \in (a,b)$ en el qual $D^+ f(x_0)$ o $D_+ f(x_0)$ (o totes dues) són iguals a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. El mateix val per a l'esquerra.

També dóna resultats sobre els valors excepcionals de les derivades de Dini, les quals no satisfan la propietat del valor intermedi:

- Qualsevol nombre derivat deixa de prendre com a màxim una quantitat numerable de valors entre les seves cotes superior i inferior.

I, efectivament, dóna exemples de funcions per a les quals hi ha infinits valors excepcionals per als seus nombres derivats.

Encara sobre les derivades de Dini, Corominas va fer una contribució contestant una pregunta de Denjoy. Els nombres derivats de primer ordre de qualsevol funció hi tenen, gairebé per a tot, les propietats següents:

1) Si dos nombres derivats associats són finits, llavors tots quatre nombres són iguals.

2) Dos nombres derivats associats no són mai infinits del mateix signe.

3) Si un nombre derivat és finit, també ho és el seu oposat.

4) Si un nombre derivat és infinit, el nombre oposat és infinit de signe contrari.

La validesa gairebé per a tot d'aquestes propietats significa que la hipòtesi es fa sobre els punts d'un conjunt E i la conclusió val per als punts de E tret d'un conjunt excepcional de mesura zero.

Denjoy va provar que la propietat 1) s'estén als nombres derivats d'ordre superior i va posar la qüestió de si passava el mateix amb les propietats 2), 3) i 4). A [4], Corominas va respondre negativament la pregunta tot i que Roger

(*C. R. Acad. Sci. Paris*, 214 (1942), 942–944) ho havia fet abans per a la propietat 2) en un treball que Corominas sembla que no coneixia.

Una altra extensió del concepte de derivada d'ordre n d'una funció va ser introduïda per Peano. Direm, seguint la nomenclatura de Denjoy, que una funció contínua al voltant d'un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ té una *diferencial d'ordre* n en el punt x_0 si $f(x_0+h)$ és la suma d'un polinomi de grau n en h i d'un terme que sigui un infinitèsim d'ordre superior a n quan $h \to 0$. Llavors el coeficient de $\frac{h^n}{n!}$ en el polinomi s'anomena l'enèsim *quocient diferencial* de f en x_0 i es representa per $f_n(x_0)$. Així doncs

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f_1(x_0)h + \cdots + \frac{f_n(x_0)}{n!}h^n + o(h^n).$$

És a dir, es parteix del desenvolupament de Taylor amb residu d'ordre n per tal de definir les diferencials successives.

És clar que si una funció té n derivades ordinàries en el punt x_0, llavors té definits els n primers coeficients diferencials, però el recíproc no és cert en general.

En la primera part de la tesi [5] Corominas estudia sistemàticament l'extensió a les derivades d'ordre superior, en el sentit de Peano, dels teoremes del càlcul diferencial ordinari: teoremes de Rolle, de Cauchy i de Lagrange, i en dóna algunes aplicacions. Com a mètode d'aproximació a les diferencials d'ordre superior utilitza el càlcul amb els quocients de diferències successives d'una funció, inspirant-se en el càlcul de diferències finites: tota diferencial d'ordre n (en el sentit de Peano) es pot expressar com un límit de quocients de diferències d'ordre n.

Per posar de manifest el tipus de resultats que Corominas obté, posem-ne alguns exemples:

- Si f i g són funcions contínues i diferenciables fins a l'ordre n a $[a,b]$ i els $n-1$ primers quocients diferencials de f i g s'anul·len al punt a i $f_n(x)$ i $g_n(x)$ no s'anul·len simultàniament a cap punt de (a,b), llavors existeix un punt $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f_n(c)}{g_n(c)} \quad (\text{amb } g(a) \neq g(b)).$$

- Si f és contínua i diferenciable fins a l'ordre n a $[a,b]$, existeix un punt $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f_1(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Com una aplicació d'aquesta versió de la fórmula de Taylor es prova que si una funció té un quocient diferencial enèsim acotat a tot un interval, llavors és una derivada enèsima ordinària.

En aquesta secció es mereix una menció especial el treball d'Ernest Corominas en col·laboració amb Ferran Sunyer que va donar com a resultat l'anunci [6] i l'article [7] que conté les demostracions i generalitzacions dels resultats de [6].

El resultat principal afirma que si f és una funció indefinidament derivable en un interval (a,b) i per a cada $x \in (a,b)$ existeix un enter positiu $n(x)$ tal que $f^{(n(x))}(x) = 0$, llavors f és un polinomi. Aquí $f^{(n)}$ indica la derivada ordinària d'ordre n.

La demostració d'aquest resultat utilitza les propietats fines de la topologia de la recta real i se'n pot donar una prova fent servir el Teorema de Baire. El llibre de R. P. Boas *A primer of real functions* [John Wiley & Sons, Nova York, 1960] l'inclou com a exemple d'aplicació del teorema de Baire juntament amb altres del mateix tipus, per exemple, amb integrals successives en lloc de derivades. Aquest és el resultat més conegut de Corominas. Després Corominas i Sunyer estudien generalitzacions del seu teorema en dos sentits: d'una banda consideren la situació que es presenta quan s'imposa l'anul·lació de les derivades només sobre un conjunt determinat i estudien com ha de ser el conjunt excepcional. En un altre sentit permeten que les derivades siguin diferents de zero però que prenguin valors dins d'un conjunt petit i estudien com ha de ser aquest conjunt. El teorema de Corominas-Sunyer ha estat objecte de generalitzacions, entre les quals a funcions de diverses variables (A. Boghossian i P. Johnson, «A pointwise condition for an infinitely differentiable function of several variables to be a polynomial», *J. Math. Anal. Appl.* 151(1) (1990), 17–19).

La segona part de la tesi d'Ernest Corominas va ser publicada en els articles [8] i [9], que

són continuació de [5]. Aquests dos articles, que tenen el mateix títol, «Àlgebra asimptòtica», desenvolupen una teoria una mica enfarfegadora, la motivació de la qual, per a Corominas, és l'estudi dels anomenats màxims i mínims d'ordre n d'una funció n vegades derivable en el sentit de Peano. Recordem que aquestes funcions són les que tenen un polinomi de Taylor d'ordre n en cada punt. Així com els màxims i els mínims ordinaris són els punts a per als quals la diferència d'ordre 0, $f(x) - f(a)$, té signe constant en un entorn de a, els màxims i mínims d'ordre n són els punts a per als quals la diferència d'ordre n (la diferència entre la funció i el seu polinomi de Taylor d'ordre n amb origen a) té signe constant.

El concepte bàsic de l'àlgebra asimptòtica és el que Corominas anomena *camp de nombres variables*. En essència, es tracta del conjunt de totes les variables —pensem en successions de nombres reals (x_n)— que tenen un ordre de creixement o bé equivalent o bé menor que el d'una variable fixa (a_n) (és a dir, el quocient x_n/a_n tendeix a 1 o bé a zero). Dit d'una manera informal, un camp de nombres variables consisteix a identificar totes les variables que es comporten asimptòticament de la mateixa manera i afegir-hi les variables d'odre menor; també es parla d'un *camp asimptòtic*. Un altre concepte bàsic és el de *polinomi variable regular*. Un polinomi variable és un polinomi que té per coeficients camps de nombres variables, i s'anomena regular respecte d'un camp asimptòtic A si per a tota substitució de la variable independent per una variable de A s'obté una variable d'un camp fixat. Per a aquests polinomis es pot donar la idea d'arrel asimptòtica i de multiplicitat corresponent a una arrel. Els polinomis regulars són estables per suma, multiplicació i divisió.

Per als polinomis regulars es pot considerar un tipus de factorització asimptòtica mitjançant les arrels asimptòtiques. També es donen criteris de comparació entre polinomis regulars per tal que les arrels asimptòtiques d'un d'ells ho siguin també de l'altre amb la mateixa multiplicitat.

Després introdueix els camps asimptòtics múltiples obtinguts a partir d'un nombre finit de variables d'un camp simple, agafant totes les variables que els són comparables i després els camps corresponents. Enuncia un teorema asimptòtic general que estableix condicions per tal que donada una successió de polinomis regulars (respecte d'un camp múltiple) es pugui assegurar que, asimptòticament, els polinomis i les seves diferències successives tinguin les mateixes arrels. Finalment aplica els resultats asimptòtics a estudiar els extrems d'ordre n d'una funció n-vegades diferenciable. Concretament pot expressar l'existència de màxims i mínims absoluts d'ordre n a partir de l'existència d'extrems absoluts de les diferències enèsimes de la funció.

Secció 2: Conjunts ordenats

Des de la seva estada a París, Corominas va tenir interès per la teoria dels conjunts ordenats. Aquest tema el va tractar amb intensitat a partir del moment que es va incorporar a la Universitat Claude-Bernard, a Lió.

El seu treball en aquest camp té molt a veure amb els conjunts òptimament preordenats, un concepte introduït per Nash i Williams cap a l'any 1968. Molt probablement, la raó per la qual Corominas s'interessa pel preordre de Nash-Williams ve del seu interès per l'anomenada *conjectura de Fraïssé sobre els tipus d'ordre* que el matemàtic Roland Fraïssé, amb qui Corominas havia tingut relació a París, va formular el 1948 en aquests termes:

- Tota successió decreixent de tipus d'ordre numerables és finita i tota anticadena de tipus d'ordre numerables és finita.

Corominas va desenvolupar una aproximació original a aquest problema que es va acostar força a la solució, però la resposta afirmativa la va donar Laver l'any 1971, en un article als *Annals of Mathematics* utilitzant el millor ordre de Nash-Williams.

Recordem algunes definicions: un conjunt preordenat Q es diu que és *ben preordenat* si per a tota successió (a_n) d'elements de Q, existeixen índexs i, j amb $i < j$ i $a_i \leq a_j$. D'altra banda, una *successió transfinita* a Q és una família d'elements de Q, $a = (a_i)_{i<\alpha}$ on α és un ordinal; si $a = (a_i)_{i<\alpha}$, $b = (b_j)_{j<\beta}$, α, β ordinals, són dues successions transfinites, es posa $a \leq b$ si existeix una aplicació $k\colon \alpha \to \beta$ que conserva l'ordre, tal que $a_i \leq b_{k(i)}$, $i < \alpha$.

Finalment, es diu que Q és *òptimament preordenat* si el conjunt de les successions transfinites de Q és ben preordenat.

A partir d'aquí Corominas es planteja l'estudi del preordre òptim en dos tipus d'estructures: els grups abelians de torsió i els arbres numerables.

En els articles [10] i [11], Corominas estableix una correspondència entre el conjunt d'arbres que contenen només cadenes finites o de tipus ω i els grups abelians de torsió.

Si A és un arbre, considera el p-grup $G(A)$ que té els elements de A com a generadors amb les relacions $x = p^r y$ si $x \leq y$ i r és la distància de x a y a l'arbre, on p és un nombre primer fixat. Els arbres es preordenen considerant $A \leq B$ si $G(A)$ és isomorf a un subgrup de $G(B)$. Resulta que els arbres amb cadenes finites es poden generar a partir de dues operacions bàsiques i s'obté la M-àlgebra dels arbres. Recordem el concepte de M-àlgebra:

> Si hom té un conjunt A i un conjunt M i per a cada $m \in M$ una aplicació $m\colon A^\alpha \to A$, on α és un ordinal, es diu que A és una M-àlgebra. Si, a més, A i M tenen preordres que compleixen determinades condicions de creixement es diu que la M-àlgebra A és ordinal.

Un teorema de Pouzet afirma que si tenim una M-àlgebra, (Q, M), on M és un sistema d'operacions a Q, i tant M com un sistema de generadors de Q són òptimament preordenats, llavors Q també és òptimament preordenada. Aplicant aquests resultats al conjunt d'arbres del qual s'ha parlat, Corominas prova que és òptimament preordenat i, com a conseqüència, és òptimament preordenada la classe dels p-grups engendrada pel conjunt d'arbres.

Els treballs [12] i [13] els va fer en col·laboració amb els seus deixebles R. Bonnet i M. Pouzet i de fet el segon és continuació immediata del primer. Tracten sobre la simplificació de factors en els productes de nombres ordinals.

Es consideren tipus d'ordre corresponents a conjunts totalment ordenats. Es diu que un tipus d'ordre α és *simplificable per l'esquerra* si per a tot parell de tipus d'ordre β, γ tals que $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, es dedueix que $\beta = \gamma$.

Els resultats de Bonnet-Corominas-Pouzet són del tipus següent:

- El tipus d'ordre α és simplificable per l'esquerra si i només si $\alpha \cdot 2 \neq \alpha$, o bé si i només si $\alpha \cdot \beta = \alpha$ implica $\beta = 1$.
- Un tipus d'ordre numerable α és simplificable per l'esquerra si i només si $\alpha \cdot \beta \not\leq \alpha$, per a tot tipus $\beta \neq 0, 1$.

Pel que fa a la simplificació per la dreta el tipus de condicions que donen són diferents.

Un tipus d'ordre α és *complet* si tota part de α té una cota superior i una cota inferior. A [13] proven, per exemple, que tot tipus d'ordre *complet* és simplificable per la dreta.

En l'article [14] Corominas reprèn l'estudi de les relacions de preordre òptim en relació amb el segon tipus d'estructura que es va proposar, és a dir, els arbres numerables.

Es consideren arbres amb la propietat que existeix l'ínfim de cada parell d'elements. Llavors una *immersió* d'un arbre T en un arbre T' és una aplicació injectiva de T a T' que conservi els ínfims. Un arbre T es diu que és *indescomposable* (fortament) si hi ha una immersió de T a $T_x = \{y \in T : x \leq y\}$ per a cada $x \in T$.

En primer lloc es donen dos criteris per tal que un arbre numerable sigui indescomposable, un dels quals té com a conseqüència que el conjunt dels arbres numerables i indescomposables és, respecte de la immersió, un conjunt òptimament preordenat. A continuació es tracten les relacions de preordre òptim en àlgebres ordinals. Si A és una M-àlgebra ordinal, Corominas dóna dos tipus de condicions sobre M que garanteixen que si tant M com una base de A tenen un preordre òptim, llavors A també té un preordre òptim. Així pot provar el resultat principal, que assegura que la classe de tots els arbres numerables té un preordre òptim per la relació d'immersió i, a més, que qualsevol arbre numerable és la suma canònica finita d'arbres indescomposables. Aquest resultat és la clau d'una extensió del preordre òptim als tipus d'ordre sèrie-paral·lels obtinguda per Stéphan Thomassé a «On better-quasi-ordering countable series-parallel orders», *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 2491–2505.

L'últim article que Corominas va publicar, [15], té a veure amb una conjectura sobre els punts fixos de les aplicacions entre conjunts ordenats i hi formula dues hipòtesis sobre els conjunts projectius. Un conjunt ordenat P es

diu que té la *propietat del punt fix* si tota aplicació de P a P que conserva l'ordre té un punt fix. Rival, l'any 1984, va plantejar la qüestió de saber si un conjunt ordenat que és el producte de dos conjunts ordenats cada un dels quals té la propietat del punt fix, també la té. Una condició suficient per obtenir una resposta afirmativa, en el cas que els dos factors siguin finits, és que tot conjunt ordenat automorf minimal que sigui un retracte d'un producte, sigui un retracte d'algun dels factors. Aquí *automorf minimal* vol dir que no admet cap retracte que tingui algun automorfisme sense punts fixos. Per tractar aquesta qüestió, Corominas introdueix el concepte de *conjunt ordenat projectiu*: és un conjunt P tal que tota aplicació creixent $f\colon P\times P \to P$ que compleixi $f(x,x) = x$, $x \in P$ sigui una projecció.

En l'article es demostra que si H és projectiu i és un retracte d'un producte $P = P_1 \times P_2$, aleshores H és un retracte de P_1 o de P_2. Llavors el problema de punt fix per a un producte de dos factors finits seria una conseqüència de la propietat següent:

- Tot conjunt automorf minimal i connex és projectiu.

Aquesta afirmació l'havia conjecturat uns anys abans el mateix Corominas i és alhora conseqüència d'una altra hipòtesi:

- Tot conjunt primer, ramificat i connex, és projectiu i recíprocament.

Un conjunt ordenat és primer si no admet cap factorització no trivial i ramificat si tot element no maximal està cobert per sobre per almenys dos elements (resp. els no-minimals, coberts per sota).

Finalment, Corominas mostra alguns exemples que donen suport a les seves conjectures. Prova que les corones i les seves superposicions i els reticles truncats de Boole, així com els conjunts ramificats i connexos de dos nivells, són tots ells projectius.

La nota de Corominas va donar lloc a diversos treballs, entre els quals la tesi de Simone Hazan: *The projection property for orders and triangle-free graphs*, dirigida per Ralph McKenzie i llegida a la Universitat de Califòrnia a Berkeley l'any 1992, que l'autora va dedicar a Corominas.

Aquesta tesi conté un contraexemple, degut a Ralph McKenzie, a la segona hipòtesi de Corominas. D'altra banda, M. Roddy, l'any 1994, va provar que la conjectura de Rival era certa si almenys un factor és finit. El cas general, però, continua obert.

Joaquim Bruna i Julià Cufí
Universitat Autònoma de Barcelona

Problemes

Malauradament aquest volum de la *SCM/Notícies* no contindrà la secció de presentació i resolució de problemes com sempre és el cas. Esperem poder reprendre la secció en el proper número. Ho sentim.

Matemots

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (podeu rellegir-ne l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple «Varietat de maneres de representar el factorial» (5 lletres). La resposta és «gamma», ja que podem parlar indistintament d'una gamma o varietat de productes (per exemple), però d'altra banda la funció gamma permet representar el factorial: $n! = \Gamma(n+1)$.

En aquesta ocasió hem preparat un monogràfic dedicat a **noms propis**. La major part són noms de matemàtics. Com que d'aquests